

Keine Ahnung von Matrizen

Was sind Matrizen

Wie rechnet man mit Matrizen

???

Eine kompakte Darstellung

Dieser Stoff wird ausführlich dargestellt im Text 62010

Datei 62009

Stand: 9. März 2024

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

Vorwort

Matrizen sind eine tolle Erfindung. Immer wenn man größere Mengen von Zahlen verarbeiten muss, kommen sie zum Einsatz. Das beginnt schon beim Lösen eines Systems aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Normalerweise stehen darin 12 Zahlen, die man zur Lösung verarbeiten soll.

Oder es geht um die Auswertung Listen, in denen Anzahlen von Objekten stehen, die man weiterverarbeitet und dann auswertet.

In diesem kurzen Text zeige ich an Hand von Beispielen ohne Übungsaufgaben, wie man die wichtigsten Rechenbefehle löst. Übungsaufgaben und eine ganz ausführliche Einführung findet man im Text 62010.

Inhalt

1	Was sind Matrizen?	3
2	Gleichheit von Matrizen	5
3	Addition von Matrizen	5
4	Vielfache von Matrizen	7
5	Subtraktion von Matrizen	7
6	Matrix mal Vektor	7
7	Anwendungsbeispiel 1: Übergangsmatrizen	8
8	Anwendungsbeispiel 2: Bedarfsmatrizen	10
9	Matrix mal Matrix	11
10	Inverse Matrizen	12
11	Anwendung: Lösung eines Gleichungssystems bzw. einer Matrixgleichung	14
12	Wie berechnet man inverse Matrizen?	15
12.1	Inverse von 2×2 – Matrizen	15
12.2	Inverse von 3×3 – Matrizen	16
12.3	Nicht invertierbare Matrizen	18

1 Was sind Matrizen?

Die Handelskette GrossMaxx hat in Stuttgart 3 Filialen A, B und C. Sie werden unter anderem mit folgenden Artikeln beliefert: Gross-Kaffee, Kaffeesahne, Maxx-Toast und X-Gelee.

Die Lieferung am 11. Juli 2008 an diese Filialen sah so aus (Bedarfstabelle):

	Gross-Kaffee	Kaffeesahne	Maxx-Toast	X-Gelee
Filiale A	30	60	100	12
Filiale B	40	100	120	25
Filiale C	12	40	30	80

Als Matrix sieht diese Tabelle so aus: $\begin{pmatrix} 30 & 60 & 100 & 12 \\ 40 & 100 & 120 & 25 \\ 12 & 40 & 30 & 80 \end{pmatrix}$ (Bedarfsmatrix).

Eine Matrix ist ein rechteckiges Schema, das im Beispiel 3 Zeilen und 4 Spalten hat.

Man nennt dies eine 3×4 – Matrix.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine quadratische Matrix, eine (3,3)-Matrix.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Diagonalmatrix, denn nur in der Diagonalen stehen von 0 verschiedene Zahlen.

Jede Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix.

$$V = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist eine Matrix mit nur 1 Spalte.

Solche Matrizen nennt man Spaltenvektoren.

und schreibt sie dann mit einem Pfeil:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = (3 \quad 9 \quad 0 \quad -2)$$

ist eine Matrix mit nur 1 Zeile.

$$\bar{z} = (3 \quad 9 \quad 0 \quad -2)$$

Jetzt ist es ein Zeilenvektor.

Besondere Vektoren sind die sogenannten Einheitsvektoren. Beispiele:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Ein Einheitsvektor besitzt immer nur eine Eins und sonst Nullen.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Einheitsmatrix, weil sie eine Diagonalmatrix ist, deren Hauptdiagonale nur Einsen enthält.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist keine Matrix.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist eine obere Dreiecksmatrix und}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist eine untere Dreiecksmatrix.$$

Als Nullvektor bezeichnet man dann $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ usw.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind Nullmatrizen, weil sie nur Nullen enthalten.

Man kürzt Matrizen oft so ab, dass man angibt, wie viele Zeilen und Spalten sie enthalten.

So bedeutet $A_{(2,3)}$, dass die Matrix A zwei Zeilen und 3 Spalten enthält:

Die allgemeine Schreibweise ist dann z. B. $A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Man kürzt das auch so ab: $A_{(2,3)} = (a_{i,k})_{(2,3)}$

Diese Schreibweise bedeutet, dass man für i die Nummern 1 und 2, für k die Nummern 1,2 und 3 verwenden darf.

Demgemäß gilt:

$$A_{(3,3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Man nennt eine Matrix symmetrisch, wenn sie auf beiden Seiten der Hauptdiagonalen gleich aussieht.

Unterscheiden sie sich nur in den Vorzeichen, heißt sie antisymmetrisch:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu manchen Zwecken muss man eine Matrix transponieren, das heißt ihre Spalten in Zeilen verwandeln:

$$\text{Zu } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ ist } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ die transponierte Matrix.}$$

Aus einem Spaltenvektor wird durch Transponieren ein Zeilenvektor:

$$\text{Aus } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ wird durch Transponieren } \vec{v}^T = (4 \quad 3 \quad -6 \quad 2)$$

Man kann zwei Matrizen auch koppeln, wenn sie dieselbe Zeilenanzahl besitzen:

$$\text{Aus } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ wird durch koppeln oder erweitern:}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array} \right)$$

2 Gleichheit von Matrizen

Wenn man rechnet, muss man zuvor wissen, was „Gleichheit“ bedeutet. Z. B. $A + B = C$.

Was bedeutet es hier, dass „A+B“ gleich „C“ ist?

Definition:

Zwei Matrizen heißen gleich, wenn sie an jeder Stelle dieselbe Zahl besitzen.

Folgerung:

Matrizen, die verschiedene Anzahlen von Zeilen und Spalten haben, können nie gleich sein.

Beispiele für **ungleiche** Matrizen: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

3 Addition von Matrizen

Grundsatz: Man kann nur Matrizen der gleichen Bauart addieren.

Dann werden die Zahlen an den entsprechenden Stellen addiert

Beispiele: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+(-3) \\ -2+(-2) & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 & 0+1 \\ 2+(-1) & 1+(-1) & (-5)+2 \\ (-3)+3 & 0+4 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Die Addition einer Nullmatrix ändert nichts}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrizen verschiedener Art kann man nicht addieren!

Rechenregeln für die Matrizenaddition

(A1)	$A + B = B + A$	Kommutativgesetz
------	-----------------	------------------

A1 besagt: Man darf zwei Matrizen bei der Addition vertauschen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist dasselbe wie:}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_B + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}!$$

(A2)	$(A + B) + C = A + (B + C)$	Assoziativgesetz
------	-----------------------------	------------------

A2 besagt: Will man mehr als 2 Matrizen addieren, kann man die Klammern setzen wie man möchte.

Zuerst berechne ich jetzt $(A + B) + C$:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 14 & 9 & 12 \\ 16 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

Dann mit anderer Klammerung: $A + (B + C)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 14 & 9 & 12 \\ 16 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

Damit kann man Rechnungen vereinfachen: $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = ?$

Ich vertausche die rechten Matrizen: $= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} =$

und addiere dann die ersten beiden Matrizen:

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 29 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$$

4 Vielfache von Matrizen

- a) Benötigt man das Dreifache einer Matrix A, dann benötigt, dann bedeutet das $3A = A + A + A$.

Beispiel:
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

ist dasselbe wie
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass man jedes Element der Matrix mit 3 multipliziert hat.

- b) Auf diese Weise erhält man auch **das Negative einer Matrix**:

$$-A = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

5 Subtraktion von Matrizen

Man soll $A - B$ berechnen:
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 5-5 \\ 4-6 & -6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Man kann entweder die Matrix $-B$ addieren oder gliedweise subtrahieren.

6 Multiplikation Matrix mal Vektor

(1) Definition:
$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}$$

Zuerst wird der obere Zeilenvektor $(a_1 \ b_1)$ mit dem (Spalten-)Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ multipliziert:

Das sieht dann so aus:
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \square & \square \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ \square \end{pmatrix}$$

Dann wird der untere Zeilenvektor $(a_2 \ b_2)$ mit dem (Spalten-)Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ multipliziert:

Also so:
$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}$$

(2) Zahlenbeispiele: a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \\ 7 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{3}{4} \cdot 1 \\ -\frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dreiermatrizen: c)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Oder das: d)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \\ 6 \cdot 8 - 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 8 + 7 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 44 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Oder so: e)
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 7 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 74 \end{pmatrix}$$

Das geht nicht:
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot ? \\ 7 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 8 \cdot ? \end{pmatrix}$$

Die Spaltenzahl der ersten Matrix muss gleich der Zeilenzahl des Vektors sein.

7 Anwendungsbeispiel 1: Übergangsmatrizen

Eine Firma verleiht Mietwagen und hat in Berlin drei Stationen A, B und C, in denen man ihre Autos abholen bzw. abgeben kann. Es gibt eine Statistik darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein in A, B oder C abgeholtes Auto in einer der drei Stationen angegeben wird.

Spalte 1: Mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 wird ein **in A abgeholtes Auto** wieder in A abgegeben. Mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 wird es jedoch in B abgegeben und mit 0,25 in C.

A	B	C	von/nach
0,5	0,6	0,4	A
0,25	0,3	0,2	B
0,25	0,1	0,4	C

Spalte 2: Ein Auto, das **in B** abgeholt wird, findet man am Folgetag mit 60% Wahrscheinlichkeit in A, mit 30% Wahrscheinlichkeit wieder in B und mit 10% Wahrscheinlichkeit in C.

Spalte 3: Die **in C entliehenen Autos** kommen mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 in A, mit 0,2 in B und mit 0,4 in C an.

Die Verteilung der Autos an einem bestimmten Tag (z. B. um 6 Uhr) stellt einen **Zustand** dar, etwa diesen: 40% der Leihautos stehen in A und jeweils 30% in B und in C.

Man kann diese Zahlen als Zustandsvektor schreiben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

Wir stellen uns jetzt diese Aufgabe.

Welche Zustände stellen sich in den drei Folgetagen ein?

Den Übergang in den 2. Tag kann man **mit einem Baumdiagramm** lösen, mit dem man ein mehrstufiges Ereignis darstellen kann, eben die **Zustandsänderungen**.

Die erste Stufe stellt den Anfangszustand dar, der durch den Zustandsvektor oder Startvektor $\vec{v}_1$ gegeben ist.

Die zweite Stufe entsteht durch die 9 Zustandsänderungen, die in der Tabelle festgehalten sind. Wir können damit berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich am nächsten Morgen ein Fahrzeug in A befindet.

Das ist **die totale Wahrscheinlichkeit für A** und besteht aus den Pfaden 1 (AA), 4 (BA) und 7 (CA):

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,20 + 0,18 + 0,12 = 0,50$$

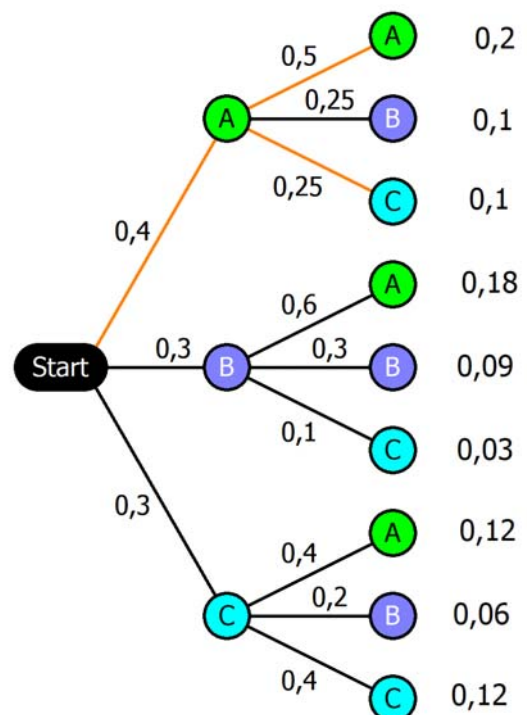
$$P(B) = 0,4 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,10 + 0,09 + 0,06 = 0,25$$

$$P(C) = 0,4 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,10 + 0,03 + 0,12 = 0,25$$

Diese Ergebnisse bilden den 2. Zustandsvektor, der die Situation am

Folgetag beschreibt:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$



Die gezeigten Berechnungen werden **mit Matrizenrechnung** übersichtlicher:

Aus der Übergangstabelle bildet man die **Übergangsmatrix U**.

$$U = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,25 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Diese wird mit dem Zustandsvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ multipliziert:

$$U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,25 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,3 \\ 0,25 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,3 \\ 0,25 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \vec{v}_2$$

Den Zustandsvektor für den 3. Tag erhält man so: $\vec{v}_3 = U \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \\ 0,25 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$.

Man erkennt, dass sich die Verteilung nicht mehr geändert hat, sie ist jetzt stabil.

Es gibt einige Texte zu Übergangsmatrizen!

8 Anwendungsbeispiel 2: Bedarfsmatrizen

Drei Mitarbeiter M_1 , M_2 und M_3 stellen vier Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 , Z_3 und Z_4 her. Die Tabelle gibt ihre durchschnittliche Arbeitszeit in Minuten an.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
M_1	30	20	40	100
M_2	40	35	50	120
M_3	25	15	40	90

Aus diesen Zwischenprodukten werden zwei Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Die **Bedarfstabelle** dazu lautet:

	E_1	E_2
Z_1	0	5
Z_2	2	2
Z_3	4	3
Z_4	1	1

Man liest das so: E_1 wird aus 2 Z_2 , 4 Z_3 und 1 Z_4 hergestellt.

Dazu nun diese Aufgabe:

Wie lange waren die drei Mitarbeiter für das Endprodukt E_1 beschäftigt?

Die Lösung für E_1 liefert die folgende Rechnung:

$$(M, E) = (M, Z) \cdot (Z, E_1) = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 & 100 \\ 40 & 35 & 50 & 120 \\ 25 & 15 & 40 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot 0 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 100 \cdot 1 \\ 40 \cdot 0 + 35 \cdot 2 + 50 \cdot 4 + 90 \cdot 1 \\ 25 \cdot 0 + 15 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 90 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 390 \\ 280 \end{pmatrix}$$

Die 1. Zeile sagt uns, dass Mitarbeiter M_1 300 Minuten für das Endprodukt E_1 braucht, usw.

Analog dazu kann man die Arbeitszeiten für E_2 berechnen:

$$(M, E) = (M, Z) \cdot (Z, E_2) = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 & 100 \\ 40 & 35 & 50 & 120 \\ 25 & 15 & 40 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot 5 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 100 \cdot 1 \\ 40 \cdot 5 + 35 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 90 \cdot 1 \\ 25 \cdot 5 + 15 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 90 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 540 \\ 365 \end{pmatrix}$$

Jetzt aber kommt ein weiterer Vorteil der Matrizenrechnung: Man kann die Berechnung für beide Endprodukte auf einmal durchführen. Dazu multipliziert man die (M, Z) -Matrix nicht mit dem Produktionsvektor von E_1 , sondern mit der (Z, E) -Matrix: Man schreibt also beide Produktionsvektoren hintereinander auf und berechnet die Produkte nacheinander

$$(M, E) = (M, Z) \cdot (Z, E) = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 & 100 \\ 40 & 35 & 50 & 120 \\ 25 & 15 & 40 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & 410 \\ 390 & 540 \\ 280 & 365 \end{pmatrix}$$

Die blauen Zahlen ergeben die Arbeitszeiten für das Endprodukt E_2 .

Und so nebenbei habe ich gezeigt, wie man Matrizen multipliziert, was ausführlich in 2.5 folgt.

9 Multiplikation: Matrix mal Matrix.

In der Rechnung drei Zeilen höher, habe ich bereits eine Matrizenmultiplikation gezeigt.

Eine (3×4) – Matrix wurde mit einer (4×2) – Matrix multipliziert.

Dazu multipliziert man die linke Matrix der Reihe nach mit den beiden Spaltenvektoren der rechten Matrix.

Als nächstes Beispiel multipliziere ich eine 4×2 – Matrix mit einer 2×3 – Matrix .

Das Multiplikationsschema sieht dann so aus:

$$\begin{array}{c} \text{=} \\ (4Z \times \boxed{2Sp}) \cdot (\boxed{2Z} \times 3Sp) \\ \text{Produkt :} \\ (4Z \times 3Sp) \end{array}$$

Achtung: Man kann nur dann zwei Matrizen miteinander multiplizieren, wenn die Spaltenzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel: Bilde das Produkt aus $(R,Z) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, (Z,E) = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 15 & 20 & 14 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{(R,Z) \cdot (Z,E)}_{=(R,E)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 15 & 20 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 11 + 5 \cdot 15 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 20 & 4 \cdot 12 + 5 \cdot 14 \\ 2 \cdot 11 + 3 \cdot 15 & 2 \cdot 8 + 3 \cdot 20 & 2 \cdot 12 + 3 \cdot 14 \\ 4 \cdot 11 + 2 \cdot 15 & 4 \cdot 8 + 2 \cdot 20 & 4 \cdot 12 + 2 \cdot 14 \\ 5 \cdot 11 + 1 \cdot 15 & 5 \cdot 8 + 1 \cdot 20 & 5 \cdot 12 + 1 \cdot 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 & 132 & 118 \\ 67 & 76 & 66 \\ 74 & 72 & 76 \\ 70 & 60 & 74 \end{pmatrix}$$

Als Text kann man dazu schreiben:

Aus 4 Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 werden zwei Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 hergestellt:

Z. B. Für Z_1 benötigt man 4 ME R_1 , 2 ME R_2 , 4 ME R_3 und 5 ME R_4 . (ME = Mengeneinheit).

Weiter fertigt man drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 aus den Zwischenprodukten. In der Matrix (Z,E) steht genaueres: E_1 wird aus 11 ME Z_1 und 15 ME Z_2 zusammengesetzt, usw.

Das Produkt der beiden Matrizen ergibt die Matrix (R,E) , deren 12 Einträge uns sagen, wie viele Rohstoffe die drei Endprodukte benötigen:

In der 1. Spalte steht: E_1 enthält 119 ME E_1 , 67 ME R_2 , 74 ME R_3 und 70 ME R_4 .

Die 1. Zeile sagt, wie der Rohstoff R_1 verteilt wird: 119 ME gehen in E_1 , 132 ME in E_2 , 118 ME in E_3 .

Und damit erfahren wir auch, dass $119 \text{ ME} + 132 \text{ ME} + 118 \text{ ME} = 369 \text{ ME}$ benötigt werden, um von jedem Endprodukt eines herzustellen.

Noch einige Produktbeispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 & 2+20 \\ 6+3 & 4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 22 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 15-6 \\ -1+8 & -5-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Die Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ.

Das heißt, dass man in einem Matrizenprodukt die Faktoren nicht vertauschen darf.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10 & 5-15 \\ 2-6 & 10+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -4 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = A$$

Nicht alle Matrizen lassen sich mit anderen multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} = \quad \text{lässt sich nicht berechnen, denn die Spaltenzahl links ist 2,}$$

die Zeilenzahl rechts müsste dann auch 2 sein, ist aber nur 1.

10 Inverse Matrizen

Wir müssen uns Gedanken darüber machen, wozu man inverse Matrizen braucht.

Ich beginne mit einer einfachen Zahlengleichung:

Wenn man die Gleichung $3x = 12$ lösen will, dividiert man durch 3 und erhält $x = 4$.

Wenn man ohne Division auskommen soll, multipliziert man die Gleichung mit der Zahl $\frac{1}{3}$,

und dann sieht das so aus^o:

$$\frac{1}{3} \cdot (3x) = \frac{1}{3} \cdot 12 \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)}_{=1} \cdot x = 4 \Leftrightarrow 1 \cdot x = 4 \Leftrightarrow x = 4.$$

Wir müssen dies ganz allgemein betrachten und die Algebra verwenden:

Will man $a \cdot x = b$ lösen, wobei $a \neq 0$ sein muss, multipliziert man beide Seiten mit dem Kehrwert von a , also mit a^{-1} :

$$a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b \Leftrightarrow \underbrace{(a^{-1} \cdot a)}_{=1} \cdot x = a^{-1} \cdot b \Leftrightarrow \underbrace{1 \cdot x}_{=x} = a^{-1} \cdot b \Leftrightarrow x = a^{-1} \cdot b$$

Nun zu Gleichungen mit Matrizen:

Diese Art, eine Gleichung zu lösen ist wichtig, wenn man eine Gleichung mit einer Matrix hat.

Da man nicht durch Matrizen dividieren kann, ist es wichtig, dass man für viele Matrizen einen Kehrwert bilden kann, eine sogenannte **inverse Matrix**.

Ich zeige noch nicht wie man sie berechnet, aber ich zeige jetzt zuerst ein Beispiel:

Zeige, dass $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ das Inverse zu $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Jetzt muss man wissen, welche **Eigenschaften Inverse** haben:

Wir haben gesehen, dass man in der Gleichung $3x = 12$ den Faktor 3 weg bekommt, wenn man mit dem Inversen von 3 multipliziert.

Wenn wir nun eine Matrizengleichungen lösen wollen, die allgemein diese Form haben kann: $A \cdot \vec{x} = B$ oder $A \cdot X = B$, dann benötigt man das Inverse von A, das man (wenn es existiert) so schreiben kann: A^{-1} .

Mit der inversen Matrix A^{-1} muss man das erreichen können: $A^{-1} \cdot A = E$ und $A \cdot A^{-1} = E$

wobei E das **neutrale Element** ist, die Einheitsmatrix, z. B: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe: Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Zeige, dass $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ das Inverse zu A ist.

Wir müssen zeigen, dass $A \cdot B = E$ ist und $B \cdot A = E$.

Lösung: $B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & -1+2 \\ 15-15 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

und $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & -1+2 \\ 15-15 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Also ist A das Inverse zu B und B das Inverse zu A.

11 Anwendung: Lösung eines Gleichungssystems bzw. einer Matrixgleichung

Gegeben sei dieses **Gleichungssystem**
$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 & (1) \\ 3x + y = 4 & (2) \end{cases}$$

Ich löse es durch Elimination:

$$(1) - 2 \cdot (2): \quad -x + 0y = -7 \Rightarrow x = 7.$$

$$\text{In (2):} \quad y = 4 - 3 \times 7 = -17$$

Damit habe ich dieses Gleichungssystem gelöst. Der Lösungsvektor ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -17 \end{pmatrix}$

Man kann das Gleichungssystem auch als **Matrixgleichung** schreiben: $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dazu multipliziert man die Gleichung von links mit der inversen Matrix, also mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

$$\text{Dann erhält man:} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{= E} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Weil wir mit der inversen Matrix multipliziert haben, ergibt das Produkt links die Einheitsmatrix und weil diese das neutrale Element ist, folgt links: $E \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\text{Aus (*) folgt also} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$\text{Und wir haben diese Gleichung gelöst:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Dieses Beispiel sollte dem Leser die Bedeutung der inversen Matrizen zeigen.

Dazu gibt es einige Texte mit Übungsbeispielen.

12 Wie berechnet man inverse Matrizen?

12.1 Inverse von 2×2-Matrizen

1. Methode: „Gleichungssystem“, Elimination

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, gesucht ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Bedingung: $A \cdot A^{-1} = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2d \\ 3a+c & 3b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Umschreiben in 4 Gleichungen:

$$5a + 2c = 1 \quad (1)$$

$$3a + c = 0 \quad (2)$$

$$5b + 2d = 0 \quad (3)$$

$$3b + d = 1 \quad (4)$$

$$(1) - 2(2): -a + 0c = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$(3) - 2(4): -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{In (2): } c = -3a = 3$$

$$\text{In (4): } d = 1 - 3b = -5$$

Ergebnis: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

2. Methode: „Gauß-Methode“, Gleichungssystem mit erweiterter Matrix lösen.

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, gesucht ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2 \cdot Z2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+3 \cdot Z1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot (-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Methode: Man erweitert die Matrix A rechts durch die Einheitsmatrix.

Dann formt man sie nach den Gaußschen Regeln so um, dass

die Einheitsmatrix links entsteht, rechts steht dann die inverse Matrix.

3. Methode: Die Determinantenmethode.

Aus $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ folgt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Gesucht ist $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Zuerst berechnet man die Determinante: $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1$

Dann bildet man $A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

In der Abwärtsdiagonale werden die Zahlen vertauscht, in der Aufwärtsdiagonale ändern sie das Vorzeichen.

12.2 Inverse von 3×3-Matrizen

Es gibt mehrere Verfahren, zu einer 3×3 – Matrix eine Inverse zu berechnen. Ich zeige hier eine Methode, die auf Gauß zurückgeht.

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist A^{-1} sodass gilt: $A \cdot A^{-1} = E$.

Also soll gelten:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E$$

Man setzt A und E zur erweiterten Matrix zusammen:

$$(A | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Mit sogenannten elementaren Umformungen erstellt man daraus

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_E$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}$

Elementare Umformungen sind:

- (1) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$.
- (2) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
- (3) Vertauschen von Zeilen.

Beginn: Addition von Zeile 1 zu Zeile 3, damit $a_{31} = -2$ zu 0 wird. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) +Z1$

Ergebnis: $\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \rightarrow Z3 \\ \rightarrow Z2 \end{array}$ Vertauschen von Zeile 2 und 3:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) :2 \quad \text{Ziel: } a_{33} = 1.$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) -Z3 \quad \text{Ziel: } a_{23} = 0.$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) :2 \quad \text{Ziel: } a_{22} = 1.$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) -Z2 \quad \text{Ziel: } a_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) :2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

Fertig! Man kann nun rechts die inverse Matrix ablesen.

Hier noch zwei Beispiele.

Zwischen den Matrizen schreibt man oft das Zeichen $\sim$, das auch Tilde genannt wird.

Es besagt, dass die Matrizen im Gaußschen Sinne gleichwertig sind.

Beispiel 2

Berechne die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+3 \cdot Z_2} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 13 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{:13} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3 \cdot Z_1} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 2 & -\frac{3}{13} & \frac{4}{13} \end{array} \right) \xrightarrow{:2} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{26} & \frac{2}{13} \end{array} \right)$$

Ergebnis: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{3}{26} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

Beispiel 3

Berechne die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+Z_1} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+5 \cdot Z_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \rightarrow Z_3 \\ \rightarrow Z_2 \end{array}} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{:(-14)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} \end{array} \right) \xrightarrow{+4 \cdot Z_3} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{14} & -\frac{4}{14} & -\frac{6}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} \end{array} \right) \xrightarrow{-5 \cdot Z_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & \frac{19}{14} & \frac{5}{14} & \frac{25}{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{14} & -\frac{4}{14} & -\frac{6}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} \end{array} \right) \xrightarrow{+Z_2} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{15}{14} & \frac{1}{14} & \frac{19}{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{14} & -\frac{4}{14} & -\frac{6}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} \end{array} \right) \xrightarrow{:2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{28} & \frac{1}{28} & \frac{19}{28} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} \end{array} \right)$$

Ergebnis: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{28} & \frac{1}{28} & \frac{19}{28} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} \end{pmatrix}$

12.3 Nicht invertierbare Matrizen

Auf Seite 14 habe ich gezeigt, wie man ein Gleichungssystem einerseits durch Elimination lösen kann, andererseits auch als Matrixgleichung. Dies klappt leider nicht immer, weil es Gleichungssysteme gibt, die keine Lösung haben. Das muss man sich anschauen.

Gegeben ist das System
$$\begin{cases} 4x + 2y = 12 & (1) \\ 6x + 3y = 21 & (2) \end{cases}$$

Ich dividiere (1) durch 2: $2x + y = 6$ (3)

Und (2) durch 3: $2x + y = 7$ (4)

Dann rechne ich (3) – (4): $0x + 0y = -1$ also $0 = -1$.

Die Annahme, das System sei lösbar, führte auf den Widerspruch $0 = -1$. Also ist die Annahme falsch.

Nun versuchen wird die Lösung über eine **Matrixgleichung**.

Unser gegebenes Gleichungssystem kann man so schreiben:
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix heißt jetzt $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ und die Matrixgleichung lautet allgemein: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Unsere Lösungsidee könnte so aussehen:

Wenn man jetzt von links mit A^{-1} multipliziert, folgt: $A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Die linke Seite kann man so berechnen: $A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{=E} \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Also erhält man die Lösung so:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} = \dots$$

Zur Ausführung dieser Lösungsidee müssen wir also die inverse Matrix berechnen.

Ich habe auf Seite 15 beschrieben:

$$\text{Aus } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ folgt } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Das bedeutet hier $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

Nun berechnen wir die Determinante von A: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 12 - 12 = 0$.

Die Rechnung endet hier, denn man kann nicht durch 0 dividieren.

Die Matrixgleichung hat also keine Lösung, was wir ja bereits wissen, da wie zuvor diese Gleichung als System nicht lösen konnten.

Folgerung: **Weil $\det(A) = 0$ ist, hat die Matrix A kein Inverses (ist A nicht invertierbar).**

Diese Erkenntnis gilt für alle Matrixgleichungen!

Man sollte also zuerst überprüfen, ob die Determinante der Matrixgleichung 0 ist oder nicht.

Wenn $\det(A) = 0$ ist, hat A keine Inverses und es gibt keine oder keine eindeutige Lösung.

Dazu dieses geänderte Beispiel:

Gegeben ist das System
$$\begin{cases} 4x + 2y = 12 & (1) \\ 6x + 3y = 18 & (2) \end{cases}$$

Ich dividiere (1) durch 2: $2x + y = 6 \quad (3)$

Und (2) durch 3: $2x + y = 6 \quad (4)$

Jetzt sind diese Folgegleichungen identisch. Also haben wir im Grunde nur eine Gleichung als Bedingung für x und y. Dann hat dieses System bzw. diese Gleichung unendlich viele Lösungen.

Man kann z. B. für x eine beliebige reelle Zahl wählen, etwa $x = r \in \mathbb{R}$, dann folgt aus der Gleichung $y = 6 - 2r$. Damit sind alle Zahlenpaar der Form $(r \mid 6 - 2r)$ Lösungen unseres Systems.

Beispielsweise sind $(1 \mid 4)$, $(5 \mid -4)$, $(-2 \mid 10)$, $(\frac{1}{2} \mid 5)$, ... Lösungen.

Empfehlung. Man berechne vor dieser Lösung $\det(A) = 0$. Dann weiß man schon, dass es auf jeden Fall keine eindeutige Lösung gibt, sondern je nach dem Vektor der rechten Seite keine oder unendlich viele Lösungen.

Zum Schluss noch eine nicht invertierbare 3×3 – Matrix :

Aufgabe: Zeige, dass die Matrix $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar ist

1. Möglichkeit: (Determinantenmethode):

Zu zeigen ist:
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Berechnung nach Sarrus:
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 8 + 6 - 18 - 16 - 4 = 0$$

2. Möglichkeit: Berechnungsversuch der inversen Matrix:

$$\begin{aligned} (A \mid E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-4 \cdot Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -10 & -5 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2 \cdot Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -10 & -5 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{10 \cdot Z2 + 3 \cdot Z1} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -10 & -5 & 1 & -4 & 0 \\ 10 & 0 & 5 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2,5 \cdot Z3 - Z1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -10 & -5 & 1 & -4 & 0 \\ 10 & 0 & 5 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2,5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Da die linke Matrix nicht mehr in die Einheitsmatrix transformierbar ist, ist B nicht invertierbar.

(In der 3. Zeilen stehen nur Nullen, daraus kann man keine 1 mehr bilden.)